



# Proyecciones de Población de la ciudad de Madrid y sus distritos

2018-2031

SERVICIO DE ESTADISTICA MUNICIPAL. MARZO 2018

## Introducción

Las Proyecciones de Población constituyen una simulación estadística de la población que residiría en Madrid en los próximos años, así como de la evolución de cada uno de los fenómenos demográficos básicos asociados, en caso de mantenerse las tendencias y comportamientos demográficos actualmente observados.

Las proyecciones demográficas representan escenarios que se producirían en el caso de que se cumplieran ciertas hipótesis, independientemente de su grado de verosimilitud. Pueden servir, simplemente, para comprender las consecuencias que tendría sobre la población el hecho de que se verificase determinada hipótesis, incluso improbable.

Las Proyecciones de Población pretenden proporcionar una herramienta de apoyo para la toma de decisiones basada en una simulación estadística del rumbo demográfico que tomaría la población residente en Madrid en los próximos años, siempre bajo la hipótesis de que se mantuviesen las tendencias demográficas actuales.

Al igual que hace el INE, en cuyas proyecciones se apoya este trabajo, se ofrecen resultados cada dos años, con un horizonte proyectivo de 15 años, según las características demográficas básicas (sexo, edad y generación).

De esta forma, sus resultados proporcionan la cifra de población residente en Madrid a 1 de enero de cada año del período 2018-2031. Igualmente, proporcionan los eventos demográficos (nacimientos, defunciones y movimientos migratorios) que han dado lugar a la evolución del volumen y estructura de la población en cada uno de los ámbitos geográficos considerados que tales cifras poblacionales representan. Ambos tipos de magnitudes, stocks de población y flujos demográficos, se encuentran desagregadas de acuerdo a características demográficas básicas, como el sexo, la edad y el año de nacimiento (generación).

### 1. Método general de cálculo

El presente ejercicio de Proyecciones de Población está basado en el *método clásico de componentes*. La aplicación de dicho método responde al siguiente esquema: partiendo de la población residente en un cierto ámbito geográfico y de los datos observados para cada uno de los componentes demográficos básicos, la mortalidad, la fecundidad y la migración, se trata de obtener la población correspondiente a fechas posteriores bajo ciertas hipótesis sobre el devenir de esos tres fenómenos, que son los que determinan su crecimiento y su estructura por edades.

El análisis retrospectivo de cada uno de los fenómenos demográficos básicos, haciendo uso de la información demográfica más actualizada disponible, ha permitido establecer hipótesis sobre la incidencia futura de los mismos en cada nivel territorial considerado en cada año del período proyectivo, cuantificada en tasas específicas de fecundidad por generación, tasas específicas de mortalidad por sexo y generación, tasas específicas por sexo y generación de emigración exterior y de migración interior, así como en flujos de inmigración exterior para cada sexo y generación.

La proyección de la población de cada sexo y edad residente a 1 de enero de cada año del periodo proyectivo se ha llevado a cabo de acuerdo a un *modelo multirregional* que proporciona como resultados, no sólo las cifras de población por sexo y edad residente en cada uno de los niveles territoriales considerados, sino también las cifras proyectadas de nacimientos, defunciones y movimientos migratorios que tendrían lugar en cada uno de los años del periodo proyectivo, guardando todo ello la necesaria coherencia entre flujos y stocks demográficos y la debida consistencia interterritorial.

Se parte de los resultados de las proyecciones de población de España 2016-2066 del INE, que ofrece resultados a nivel provincial con un horizonte proyectivo de 15 años.

En concreto, de las siguientes tablas referidas a la Comunidad de Madrid.

- Población residente a 1 de enero por sexo, edad y año
- Nacimientos por sexo del nacido, generación de la madre y año
- Defunciones por sexo, generación y año
- Emigraciones con destino al extranjero por sexo, generación y año
- Emigraciones con destino al resto de España por sexo, generación y año
- Inmigraciones procedentes del extranjero por sexo, generación y año
- Inmigraciones procedentes del resto de España por sexo, generación y año

## 2. Software de la Junta de Andalucía para proyecciones de población

La aplicación utilizada para llevar a cabo la proyección ha sido por el Servicio de Estadísticas Demográficas y Sociales del Instituto de Estadística y Cartografía de en lenguaje de programación R, un potente lenguaje orientado a objetos y destinado al análisis estadístico y la representación de datos.

Dicha aplicación requiere como fichero de entrada un fichero .xls con las siguiente hojas:

- Población
- Tasas específicas de fecundidad
- Tasas específicas de mortalidad
- Tasas específicas de emigración
- Inmigraciones (en valores absolutos)
- Matriz de flujos

Indicar que, en el caso de la matriz de flujos necesaria para la estimación de los distritos, ha habido que realizar algunos pequeños cambios en el código R, dado que el tamaño de la matriz requerido sobrepasaba los límites soportados por los ficheros .xls

Respecto al cálculo, indicar que se han realizao dos proyecciones:

1. La primera para la Comunidad de Madrid, dividida en dos regiones: municipio de Madrid y resto de Comunidad, con el objetivo de reproducir los resultados del INE para la Comunidad de Madrid distribuidos entre la capital y el resto de la Comunidad.
2. La segunda proyección va referida al municipio de Madrid dividido en 21 regiones, correspondientes a los 21 distritos administrativos, la cual reproduce los resultados obtenidos para Madrid capital en la primera proyección pero distribuidos por distritos.

El cálculo detallado de cada una de las seis hojas de entrada para cada proyección es el que se expone en los apartados que siguen.

### 3. Población

La población de partida se obtiene a partir del Padrón Municipal de Habitantes a 1 de enero de 2016 por sexo y edades simples para el municipio y para cada uno de sus 21 distritos.

### 4. Tasas de fecundidad

Se calculan las tasas específicas de fecundidad implícitas en la proyección del INE mediante las siguientes operaciones:

- 4.1. En la tabla del INE "*Nacimientos por sexo del nacido, generación de la madre y año*", se suman ambos sexos para obtener el flujo de nacidos por generación de la madre.
- 4.2. Relacionando el flujo de nacidos por generación de la madre con la tabla del INE "*Población residente a 1 de Enero por sexo, edad y año*" se obtienen las tasas específicas de fecundidad aplicando la fórmula estándar de tasa específica:

$$Tf_{xt} = \frac{Nacidos_{xt}}{(mujeres_{xt} + mujeres_{x(t+1)})/2}$$

*x = generación*

*t = año de proyección*

- 4.3. Para la proyección del municipio se aplica a cada generación de mujeres una tasa de fecundidad diferencial, según pertenezcan al municipio o al resto de la Comunidad, tasa que se obtiene de la siguiente forma:

Se calcula la media de las tasas específicas de fecundidad de los años 2011 a 2013 correspondientes al municipio de Madrid (m) y a la Comunidad de Madrid (c) a partir de la estadística de movimiento natural de la población del INE y del padrón continuo, de manera que la tasa diferencial a aplicar, a partir de estas, medias es:

$$Td_i = (T_{ci} - T_{mi}) / T_{ci}$$

*T<sub>cx</sub> = Media 2011-2013 de las tasas específicas de fecundidad de las mujeres de edad i en la Comunidad de Madrid.*

*T<sub>mx</sub> = Media 2011-2013 de las tasas específicas de fecundidad de las mujeres de edad i en el Municipio.*

Multiplicando las tasas diferenciales así calculadas por la matriz de las tasas de fecundidad obtenida en 4.2, se obtiene la matriz de tasas de fecundidad del municipio; y multiplicando las complementarias de estas tasas diferenciales (1-Td) por la misma matriz, se obtiene la matriz de tasas de fecundidad correspondiente al resto de la Comunidad.

Para la proyección de Distritos se sigue el mismo procedimiento, es decir, se obtienen 21 matrices, una para cada distrito, a partir de tasas diferenciales de cada distrito.

En este caso, la matriz de tasas de fecundidad a la que se aplican las tasas diferenciales es la matriz de municipio reseñada en el párrafo anterior y las tasas diferenciales de los distritos se obtienen de las medias de las tasas de fecundidad 2008-2010, calculadas en base a la estadística de movimiento natural de la población de la Comunidad de Madrid (que publica el Instituto de Estadística de la CAM) y el padrón continuo de población.

## 5. Tasas de mortalidad

Las tasas específicas de mortalidad que se utilizan, tanto en la proyección del municipio como en la de los distritos, son las implícitas en la proyección del INE, es decir, que la misma matriz de tasas de mortalidad se repite tantas veces como regiones se consideran en la proyección (dos en el caso del municipio y 21 en el caso de los distritos).

La matriz implícita en las proyecciones del INE se obtiene a partir de la tabla de defunciones y de la de población, aplicando la fórmula general de tasa específica:

$$Tm_{sxt} = \frac{Defunciones_{sxt}}{(Población_{sxt} + Población_{sx(t+1)})/2}$$

*s = sexo*

*x = generación*

*t = año de proyección*

Teniendo en cuenta que la fórmula cambia para la primera y la última generación de cada año de proyección.

Es decir, que para  $i=n$  la tasa específica es:

$$Tm_{sxt} = \frac{Defunciones_{sxt}}{Nacidos_{sxt}/2}$$

*s = sexo*

*x = generación*

*t = año de proyección*

Y para  $i=n-100$  la tasa específica viene dada por la expresión:

$$Tm_{sxt} = \frac{Defunciones_{sxt}}{(Población_{s(x+1)t} + Población_{sxt} + Población_{sx(t+1)})/2}$$

*s = sexo*

*x = generación*

*t = año de proyección*

Para la proyección por distritos tan solo hay que sustituir la tabla de defunciones del INE por la salida de la proyección del municipio en el numerador de las fórmulas anteriores.

## 6. Tasas de emigración

Para la proyección municipal las emigraciones a utilizar proceden de la suma de las tablas del INE, emigraciones al resto de España y emigraciones al extranjero.

Para la proyección por distritos hay que calcular, a partir de la matriz de flujos y de la población municipal proyectada, las emigraciones desde el municipio a la Comunidad de Madrid que son las que hay que sumar a las emigraciones municipales que facilita como resultados el modelo proyectado municipal para utilizar en el numerador de las tasas específicas de emigración de los distritos.

Las tasas de emigración exterior por generación  $x$  para cada sexo  $s$  de un año  $t$  se pueden expresar como:

$$e_{s,x}^t = ISE^t \cdot DE_s^t \cdot c_{s,x}^t$$

Siendo, para cada año  $t$ :

$$ISE^t = \sum_x e_x^t \text{ el Índice Sintético de Emigración exterior}$$

$$DE_s^t = \frac{ISE_s^t}{ISE^t} \text{ el diferencial por sexo } s, \text{ con } ISE_s^t = \sum_x e_{s,x}^t$$

$$c_{s,x}^t = \frac{e_{s,x}^t}{\sum_x e_{s,x}^t} \text{ el calendario por generación } x$$

De este modo, para proyectar dichas tasas, lo podremos hacer proyectando cada uno de sus componentes, que se mantendrán constantes a lo largo de todo el periodo proyectivo. Dichos componentes serán, a grandes rasgos: la intensidad de la emigración del año corriente (medida a través del índice sintético), un diferencial por sexos y una distribución por generaciones de dicha intensidad (calendario por generación), obtenidos a partir de los datos de los últimos cinco años (2011-2015) de la Estadística de Migraciones, para evitar la variabilidad propia de un mayor nivel de detalle.

Las tasas de emigración de distritos se obtienen como el producto de cuatro factores: la intensidad de la emigración del año (medida a través del índice sintético), un diferencial por sexos, un diferencial por distritos y una distribución por generaciones de dicha intensidad (calendario por

generación), obtenidos también a partir de los datos de los últimos cinco años (2011-2015) de la Estadística de Migraciones.

En mayor detalle, el proceso es el siguiente:

1. Intensidad de la emigración exterior:

La intensidad emigratoria se mide a través del Índice Sintético de Emigración Exterior (ISE), es decir, la suma de las tasas específicas por generación. Dicha intensidad se ha establecido a partir de las tasas de emigración exterior calculadas a partir de la última información proporcionada por la Estadística de Migraciones, es decir, con los flujos de emigración exterior provisionales del año 2015. De esta forma, se establece un Índice Sintético de Emigración Exterior que se mantendrá constante para cada año del período proyectivo.

2. Diferencial por sexo de la intensidad de emigración al exterior:

Se proyecta un diferencial por sexo para la intensidad de emigración al exterior que se mantiene constante para todo el período proyectivo y se obtiene como sigue:

- El promedio de las tasas específicas de emigración exterior por año de nacimiento para cada sexo, cuya suma da lugar al Índice Sintético de Emigración Exterior para cada sexo promedio de los años 2011-2015.
- El promedio de las tasas específicas de emigración exterior de España por año de nacimiento (ambos sexos), cuya suma da lugar al Índice Sintético de Emigración Exterior promedio de los años 2011-2015.

Así, el diferencial por sexos se define como el cociente entre ambos índices:

$$DE_s^t = DE_s^{promedio} = \frac{ISE_s^{promedio}}{ISE^{promedio}}$$

para cada año  $t = 2018, 2019, \dots, 2030$ , y cada sexo  $s$ .

De este modo, el Índice Sintético de Emigración Exterior para cada sexo y para cada año del período proyectivo sería:

$$ISE_s^t = ISE_{2015} \cdot DE_s^t$$

para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$

3. Diferencial distritos:

Para los 15 primeros años, se proyecta un diferencial distritos de la intensidad de emigración al exterior en cada sexo, que se mantiene constante en cada año del período proyectivo. Se obtiene a partir del observado en los últimos años (2011-2015) en los resultados sobre flujos migratorios, teniendo en cuenta la estabilidad en el tiempo que presenta también tal

indicador. A partir de las tasas específicas de emigración exterior de cada distrito por sexo y año de nacimiento promedio de las de cada año del periodo 2011-2015, se ha calculado el Índice Sintético de Emigración por sexo de cada distrito, y a partir de los mismos el mencionado diferencial:

$$DE_{s,dto}^t = DE_{s,dto}^{promedio} = \frac{ISE_{s,dto}^{promedio}}{ISE_s^{promedio}}$$

para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$  y cada distrito  $dto$ .

De este modo, el Índice Sintético de Emigración Exterior de distritos por sexo para cada año del periodo proyectivo se obtendrían como:

$$ISE_{s,dto}^t = ISE_s^t \cdot DE_{s,dto}^t$$

para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$  y cada distrito  $dto$ .

#### 4. Calendario por generación

Se proyecta el calendario de emigración por generación o año de nacimiento para cada sexo, que se mantendrá constante para cada año del periodo proyectivo, teniendo en cuenta la estabilidad observada del mismo en los últimos años. Se ha derivado en los siguientes pasos:

- 1) Obtención de las tasas específicas de la emigración al extranjero por edad a 31 de diciembre (generación)  $x$ , para sexo  $s$  promedio de las de cada año del periodo 2011-2015,  $e_{s,x}^{promedio}$ .
- 2) Tales tasas son además sometidas a una transformación consistente en hacerlas constantes a partir de los 85 años y más años cumplidos a 31 de diciembre de cada año, asignándoles el promedio de dichas tasas a todas ellas, a fin de obviar la extrema variabilidad que presentan las mismas en las edades más avanzadas, debida únicamente a factores aleatorios.
- 3) A partir de las tasas anteriores obtenemos un calendario por generación de la emigración exterior para cada sexo dividiendo cada tasa específica entre la suma de todas ellas, es decir, entre el Índice Sintéticos de Emigración Exterior de cada sexo.

$$c_{s,x}^{promedio} = \frac{e_{s,x}^{promedio}}{ISE_s^{promedio}}$$

- 4) Finalmente, el calendario proyectado se deriva de un procedimiento de suavizado del calendario obtenido en el punto anterior, consistente en un triple proceso de medias móviles de cinco generaciones consecutivas:

$$c_{s,x}^t = \tilde{c}_{s,x}^{promedio}$$



Análogamente se obtienen los calendarios de distrito a partir de tasas de distrito promedio de las de los años 2011-2015:

$c_{s,x,d_i}^t$  para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$ , cada edad  $x$  a 31 de diciembre y cada distrito  $d_i$ .

Finalmente, las tasas por generación proyectadas se derivan de las siguientes expresiones:

- Nivel municipal: para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$  y cada edad  $x$  a 31 de diciembre, la tasa de emigración exterior por proyectada será:

$$e_{s,x}^t = ISE^{2015} \cdot DE_s^t \cdot c_{s,x}^t$$

- Nivel distrito: para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$  y cada edad  $x$  a 31 de diciembre y cada distrito  $d_i$ , la tasa de emigración exterior por proyectada será:

$$e_{s,x,d_i}^t = ISE^{2015} \cdot DE_s^t \cdot DE_{s,d_i}^t \cdot c_{s,x,d_i}^t$$

## 7. Inmigraciones

Las inmigraciones se introducen en la proyección como flujos de valores absolutos.

Para la proyección municipal se distribuyen entre el municipio y el resto de la Comunidad las tablas de inmigraciones procedentes del extranjero y del resto de España.

En ambos casos se utiliza la estadística de migraciones de la Comunidad de Madrid años 2011 a 2015 (destino Comunidad de Madrid - procedencia el extranjero y destino Comunidad de Madrid - procedencia resto de CC.AA.), obteniéndose el porcentaje medio (para estos cinco años) de distribución entre el municipio de Madrid y el resto de los municipios de la CAM.

Aplicando estos porcentajes a cada tabla del INE y sumando los resultados se obtienen las dos matrices de flujos inmigratorios (uno para Madrid y otro para el resto de la Comunidad) necesarios para la proyección municipal.

Para la proyección por distritos hay que distribuir entre los 21 distritos no solo las inmigraciones del extranjero y del resto de España, sino también las procedentes del resto de la CAM. La sistemática seguida es la misma, aunque en este caso la fuente para la estimación de los porcentajes de distribución son las Altas padronales según origen de también los años 2011 a 2015.

## 8. Matriz de flujos

La matriz de flujos contiene las tasas específicas correspondientes a los movimientos migratorios internos, es decir, en el caso de la proyección municipal, los movimientos migratorios Madrid municipio – resto de la Comunidad de Madrid y en el caso de los distritos los cambios de domicilio interdistritales.

Sobre estos movimientos, el INE no ofrece ningún tipo de resultados y se proyectan autónomamente intentando reproducir la metodología del INE para la proyección de los movimientos migratorios interprovinciales.

Los datos de partida utilizados son:

- Para la proyección municipal, el padrón continuo años 2011 a 2015 y las estadísticas de migraciones del Instituto de Estadística de la Comunidad, también años 2011 a 2015 (destino y procedencia la Comunidad de Madrid según municipio de origen idem según municipio de destino).
- Para la proyección de distritos, por su parte, los cambios de domicilio del padrón municipal de habitantes también para los años 2011 a 2015.

Será necesario por tanto proporcionar las tasas específicas de migración interior por generación  $x$  para cada sexo  $s$ , desde el distrito  $h$  al distrito  $k$ , para cada año  $t$  del período proyectivo,  $e_{s,x,h,k}^t$

Dichas tasas se proyectan constantes para todo el período proyectivo, y las obtendremos como el producto de cuatro factores: la intensidad de emigración al resto del Municipio desde el distrito  $h$  para el año  $t$ , cuantificada en el Índice Sintético de Emigración Interior de dicho distrito para cada año ( $ISE\ int_{s,h}^t$ ); un diferencial por sexo de la intensidad anterior ( $DE\ int_{s,h}^t$ ); el calendario por generación  $x$  de emigración al resto del Municipio de la población de sexo  $s$  residente en el distrito  $h$  en el año  $t$  ( $c_{s,x,h}^t$ ); y un coeficiente de reparto según distrito de destino  $k$  de la migración interior en cada sexo  $s$  y edad  $x$  desde el distrito  $h$  hacia el distrito  $k$  en el año  $t$  ( $a_{s,x,h,k}^t$ ). De esta forma, se tiene que dichas tasas se pueden expresar como:

$$e_{s,x,h,k}^t = ISE\ int_h^t \cdot DE\ int_{s,h}^t \cdot c_{s,x,h}^t \cdot a_{s,x,h,k}^t$$

El proceso es el que se describe a continuación:

1. Simulación de la intensidad emigratoria al resto del Municipio desde cada distrito (ambos sexos) en cada año del período proyectivo, de acuerdo a su comportamiento estimado más reciente:

La intensidad emigratoria desde cada distrito al resto del Municipio se mide a través del Índice Sintético de Emigración Interior (ISE int), es decir, la suma de las tasas específicas por generación para cada distrito de origen estimadas según la última información proporcionada, es decir, con los flujos de emigración interior provisionales del año 2015.

2. Diferencial por sexos de la intensidad de la emigración interior

Se proyecta un diferencial por sexo para la intensidad de emigración desde un distrito al resto del Municipio, que se mantiene constante para todo el período proyectivo y se obtiene como sigue:

A partir de los últimos años (2011-2015), se obtiene:

- El promedio de las tasas específicas de emigración desde un distrito al resto del Municipio por año de nacimiento para cada sexo, cuya suma da lugar al Índice Sintético de Emigración Interior para cada sexo promedio de los años 2011-2015 para ese distrito.
- El promedio de las tasas específicas de emigración desde un distrito al resto del Municipio por año de nacimiento (ambos sexos), cuya suma da lugar al Índice Sintético de Emigración Interior promedio de los años 2011-2015 para ese distrito.

Así, el diferencial por sexos se define como el cociente entre ambos índices:

$$DE\ int_{s,h}^t = DE\ int_{s,h}^{promedio} = \frac{ISE\ int_{s,h}^{promedio}}{ISE\ int_h^{promedio}}$$

para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ , cada sexo  $s$ .

De este forma obtendríamos los Índices Sintéticos de Emigración Interior de cada distrito y sexo proyectados para cada año como:

$$ISE\ int_{s,h}^t = ISE\ int_h^t \cdot DE_{s,h}^t$$

para cada año  $t = 2016, 2017, \dots, 2030$ .

### 3. Calendario por generación:

Se proyecta el calendario por generación de la emigración al resto del Municipio para cada sexo de la población residente en cada distrito, que se mantiene constante para todo el periodo proyectivo, teniendo en cuenta la estabilidad observada del mismo en los últimos años. Dicha proyección se ha derivado en los siguientes pasos:

- 1) Se obtienen las tasas específicas de emigración al resto del Municipio por edad a 31 de diciembre (generación)  $x$  para cada sexo  $s$  promedio de las de cada año del periodo 2011-2015 para cada distrito  $h$ ,  $e_{s,x,h}^{promedio}$ .
- 2) Tales tasas son además sometidas a una transformación consistente en hacerlas constantes a partir de los 85 años y más años cumplidos a 31 de diciembre de cada año, asignándoles el promedio de dichas tasas a todas ellas, a fin de obviar la extrema variabilidad que presentan las mismas en las edades más avanzadas, debida únicamente a factores aleatorios.
- 3) A partir de las tasas anteriores obtenemos un calendario por generación de la emigración de cada distrito al resto del Municipio dividiendo cada tasa específica entre suma de todas ellas, es decir, el Índice Sintético de Emigración al resto del Municipio de cada sexo y distrito:

$$c_{s,x,h}^{promedio} = \frac{e_{s,x,h}^{promedio}}{ISE\ int_{s,h}^{promedio}}$$

- 4) Finalmente, el calendario de distritos proyectado para cada año del periodo proyectivo se deriva de un procedimiento de suavizado del calendario obtenido en el punto anterior, consistente en un triple proceso de medias móviles de cinco generaciones consecutivas:

$$c_{s,x,h}^t = \tilde{c}_{s,x,h}^{promedio}$$

4. Coeficiente de reparto por distrito de destino:

El coeficiente de reparto de las tasas específicas de emigración al resto del Municipio desde un distrito por sexo y año de nacimiento según distrito de destino se ha derivado también del observado en el periodo 2011-2015 y se ha mantenido constante para todo el periodo de proyección.

Este coeficiente se obtiene como el cociente entre las tasas de emigración interior de origen-destino para cada año de nacimiento, sexo y las tasas de emigración interior para cada año de nacimiento, sexo y provincia de origen, ambas obtenidas mediante el procedimiento descrito para los calendarios. Dicho coeficiente de reparto estimado según distrito de destino  $k$ , en cada sexo  $s$ , edad (a 31 de diciembre)  $x$  desde el distrito de origen  $h$  proyectado para el año  $t$  lo denotamos por  $a_{s,x,h,k}^t$